Komplexe Zahlen:

Zusammenhang zwischen trigonometrischen Funktionen und Exponentialfunktionen kann über komplexe Zahlen erklärt werden.

$\rightarrow$ auch Wurzeln negativer Zahlen können betrachtet werden

Quadratische Gleichung:

$x^2 + 1 = 0$ bzw. $x^2 = -1$

$\rightarrow$ keine reelle Lösung, da keine reelle Zahl quadriert negativ sein kann

Man könnte aber schreiben:

$x_1 = +\sqrt{-1}$, $x_2 = -\sqrt{-1}$

Man wählt das Symbol: $i = \sqrt{-1}$

Es soll gelten: $i^2 = -1$

$$\begin{aligned} x^2 &= -1 \\ x_1 &= \ \ i \\ x_2 &= -i \end{aligned}$$

diese Lösung quadrieren:

$$\begin{aligned} x_1^{\ 2} &= \quad i^2 \ = -1 \\ x_2^{\ 2} &= \left(-1^2\right) = i^2 = -1 \end{aligned}$$

i hat keine reale Bedeutung, man nennt dieses Symbol **imaginäre Einheit**

$$\begin{aligned} x^2 + a &= 0 \\ x^2 &= a \\ x_1 &= \sqrt{-a} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{a} \cdot i \\ x_2 &= -\sqrt{a} = -\sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} = -\sqrt{a} \cdot i \end{aligned}$$

Lösungen quadrieren:

$$x_1^{\,2} = \quad a \cdot i^2 \quad = -a$$
$$x_2^{\,2} = \left(-\sqrt{a}\right)^2 \cdot i^2 = -a$$

Verallgemeinerung des Begriffs der imaginären Einheit zu:

Imaginäre Zahl:

$z = b \cdot i$ $\qquad z =$ imaginäre Zahl; $\; b =$ beliebig reell; $\quad i^2 = -1$

Die imaginäre Einheit $z = i$ ist eine spezielle imaginäre Zahl $(b = 1)$

Lösung einer allgemein quadratischen Gleichung:

$$x^2 + px + q = 0$$

Quadratische Ergänzung:

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

Also gilt:

$$x^2 + px + q = \underbrace{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} = 0$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Fall 1: $p^2 = 4q$ $\qquad \rightarrow$ reelle Doppellösung $x_1 = x_2 = -\dfrac{p}{2}$

Fall 2: $p^2 \rangle 4q$ $\qquad \rightarrow$ zwei verschiedene reelle Lösungen

Fall 3: $p^2 \langle 4q$ $\quad\rightarrow$ keine reelle Lösung

Mit Hilfe imaginärer Zahlen kann man jedoch schreiben:

$$\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \sqrt{\left(q - \frac{p^2}{4}\right) \cdot (-1)} = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \cdot i$$

Setzt man nun:

$-\frac{p}{2} = a$ (reell) $\qquad$ und $\qquad$ $\sqrt{q - \frac{p^2}{4}} = b$ (reell)

So erhält man zwei Lösungen:

$x_{1/2} = a \pm b \cdot i$ $\qquad$ a, b reell

Zahlen dieser Form sind **komplexe Zahlen**

<u>Zusammenfassung der Definitionen:</u>

1.) Komplexe Zahl: $\qquad z = \underbrace{a}_{\text{Re}\,alteil} + \underbrace{b \cdot i}_{\text{Im}\,aginärteil}$

a, b beliebig reell, $i^2 = -1$

C= Menge der komplexen Zahlen

2.) $\bar{z} = a - b;$

$\bar{z}$ heißt die zu z konjugierte komplexe Zahl

3.) $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Absolutbetrag (oder einfach Betrag) einer komplexen Zahl

4.) $a = \mathrm{Re}(z)$ bzw. $b = \mathrm{Im}(z)$

Realteil bzw. Imaginärteil einer komplexen Zahl

5.) Zwei komplexe Zahlen heißen gleich, wenn sie in Realteil und Imaginärteil übereinstimmen

$$a_1 + b_1 \cdot i = a_2 + b_2 \cdot i \leftrightarrow a_1 = a_2;\ b_1 = b_2$$

Summe und Differenz zweier komplexer Zahlen

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1 \cdot i) \pm (a_2 + b_2 \cdot i)$$

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot i$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) \cdot i$$

Beispiel: $z_1 = 2 - 3 \cdot i$

$z_2 = 3 + 2 \cdot i$

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (2+3) + (-3+2) \cdot i \\ &= 5 - i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (2-3) + (-3-2) \cdot i \\ &= -1 - 5 \cdot i \end{aligned}$$

Die zu z_1 und z_2 konjugierte komplexe Zahlen:

$$\bar{z}_1 = 2 + 3 \cdot i$$

$$\bar{z}_2 = 3 - 2 \cdot i$$

Betrag:

$$|z_1| = \sqrt{a_1^{\,2} + b_1^{\,2}} = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$

$$|z_2| = \sqrt{a_2^{\,2} + b^{\,2}} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

Produkt zweier komplexer Zahlen
$\rightarrow$ es gelten die üblichen Klammerregeln

$$z_1 = a_1 + b_1 \cdot i$$
$$z_2 = a_2 + b_2 \cdot i$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + b_1 \cdot i) \cdot (a_2 + b_2 \cdot i) \\ &= a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2 \cdot i + a_2 \cdot b_1 \cdot i + b_1 \cdot b_2 \cdot i^2 \\ &= a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2 \cdot i + a_2 \cdot b_1 \cdot i + b_1 \cdot b_2 \cdot (-1) \end{aligned}$$

Es gilt daher:

$$(a_1 + b_1 \cdot i) \cdot (a_2 + b_2 \cdot i) = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) \cdot i$$

Des Weiteren gilt:

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ (konjugierte Zahl $\overline{z_1 \cdot z_2}$)

$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ (Betrag $|z_1 \cdot z_2|$)

Beispiel Multiplikation

$a_1 = 2 \quad a_2 = 3 \quad b_1 = 3 \quad b_2 = 2$

$$z_1 = 2 - 3 \cdot i \rightarrow \bar{z}_1 = 2 + 3 \cdot i$$
$$z_2 = 3 + 2 \cdot i \rightarrow \bar{z}_2 = 3 - 2 \cdot i$$

$$z_1 \cdot z_2 = [2 \cdot 3 - ((-3) \cdot 2)] + [2 \cdot 2 + ((-3) \cdot 3)] \cdot i = 12 - 5 \cdot i$$
$$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = [2 \cdot 3 - (3 \cdot (-2))] + [(2 \cdot (-2)) + 3 \cdot 3] \cdot i = 12 + 5 \cdot i$$

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= (a + b \cdot i) \cdot (a - b \cdot i) \\ &= a^2 - a \cdot b \cdot i + a \cdot b \cdot i - b^2 \cdot i^2 \\ &= a^2 - b^2 \cdot (-1) \\ &= a^2 + b^2 = |z|^2, \qquad \text{da } |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Quotient einer komplexen Zahl:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 \cdot i}{a_2 + b_2 \cdot i}$$

Erweitern des Quotienten mit dem konjugierten komplexen Nenner $\bar{z}_2 = a_2 - b_2 \cdot i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 + b_1 \cdot i) \cdot (a_2 - b_2 \cdot i)}{(a_2 + b_2 \cdot i) \cdot (a_2 - b_2 \cdot i)} = \frac{(a_{1.} \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2) + (a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2) \cdot i}{a_2^{\ 2} + b_2^{\ 2}}$$

Realteil Imaginärteil

$$= \frac{a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2}{a_2^{\ 2} \cdot b_2^{\ 2}} + \frac{a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2}{a_2^{\ 2} + b_2^{\ 2}} \cdot i$$

Es gilt:

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad \overline{\left| \frac{z_1}{z_2} \right|} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

Beweis:

$$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{\bar{z}_1 \cdot z_2}{\bar{z}_2 \cdot z_2} = \frac{(a_1 - b_1 \cdot i) \cdot (a_2 + b_2 \cdot i)}{(a_2 - b_2 \cdot i) \cdot (a_2 + b_2 \cdot i)}$$

$$= \frac{(a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1) \cdot i}{a_2^{\ 2} + b_2^{\ 2}}$$

$$= \frac{a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2}{a_2^{\ 2} + b_2^{\ 2}} - \frac{a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2}{a_2^{\ 2} + b_2^{\ 2}} \cdot i = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)}$$

Beispiel Division:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 - 3 \cdot i}{3 + 2 \cdot i} = \frac{(2 - 3 \cdot i) \cdot (3 - 2 \cdot i)}{(3 + 2 \cdot i) \cdot (3 - 2 \cdot i)} = \frac{(6 - 6) - (4 + 9) \cdot i}{3^2 + 2^2} = -\frac{13}{13} \cdot i = -i$$